

# פרויקט מחקר – דוח מסכם

זרימת גז קלוש בתעלה חסומה חלקית

מגיש : רוני שפירו

ת"ז : 323062562

מנחה : פרופ"ח אבשלום מנלה

## תוכן עניינים

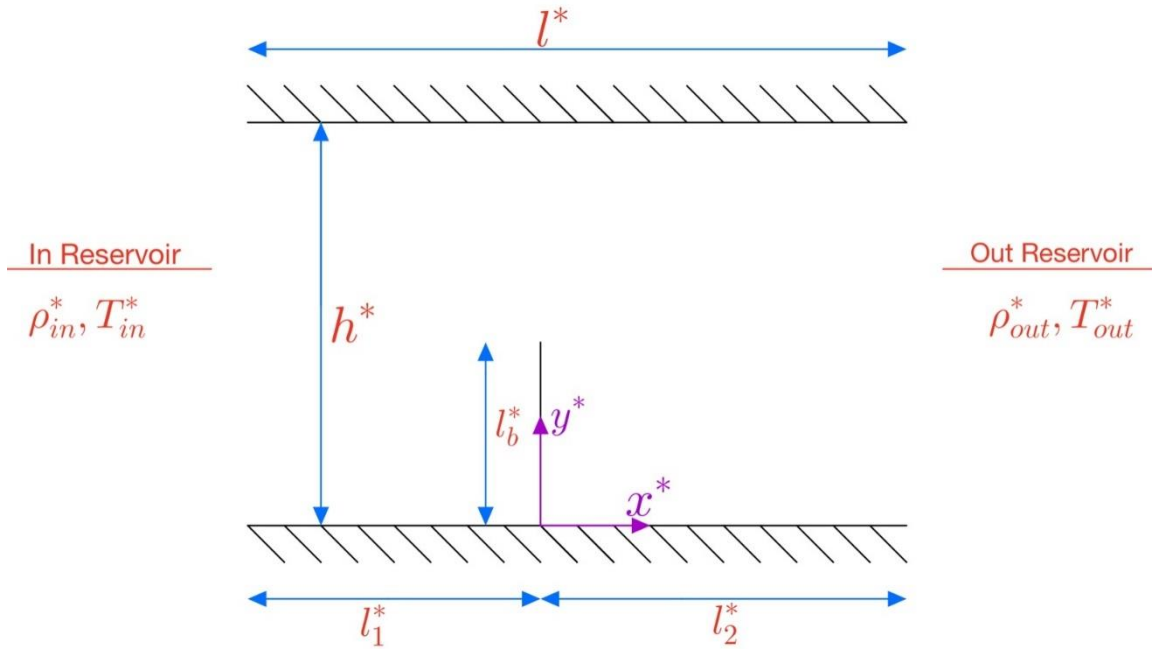
1	פרויקט מחקר – דוח מסכם
1	זרימת גז קלוש בתעלה חסומה חלקית
2	תוכן עניינים
3	מבוא
3	הצגת הבעיה
4	הבעיה המתמטית
4	משוואת בולצמן
5	נרמול
5	משוואת בולצמן המנורמלת
5	פילוג מקסוול
6	תנאי שפה Diffuse
6	ניסוח הבעיה המתמטית
7	פתרון שדה הזרימה
7	סכמת הפתרון
7	פילוג מקסוול של הקיר
12	חישוב השדות ההידרודינמיים
13	חישוב הספיקה והכוח על הקיר
14	תוצאות מספריות
15	שדות הצפיפות ההידרודינמית :
17	שדות המהירות ההידרודינמית
19	ספיקה מסית
20	דיון בתוצאות
21	סיכום
21	ביבליוגרפיה

## מבוא

מעבר גזים בתעלות מיקרוניות בעלות שפה שאינה חלקה הינו נושא בעל עניין גובר בקהילה המדעית בשנים האחרונות. העבודות שבוצעו עד כה התמקדו בחקירה מספרית של מספר תצורות קנוניות שנחקרו רבות בעבר בהקשר זרימות רצף, כדוגמת גאומטרית מדרגה (Manela & Gibelli 2020; Morgan 1984; Chen 2018), זרימה בתעלה בצורת זיגוג (Sharipov 2012) וזרימה דרך חריר/סדק (Stewart 1968; Narasimha 1960). העבודות בוצעו במטרה לאפיין את התנאים בהם מופיעים ניתוקי זרימה בתווך, להם השפעה הנדסית מכריעה על ספיקת הזורם ומעברו במבני מיקרו תעלות מורכבים (Thorsen, Maerkl & Quake 2002). חלק מכריע של המחקרים הקיימים התמקדו בניתוח משטר הזרימה בגבול הרצף המתרחש במספרי קנווסן נמוכים (Beskok 2001; Baysal, Erbas & Koklu 2004). בנוסף, מבוססות כל העבודות הקיימות על הדמיות מספריות של הפתרונות, אם באמצעות שיטת מונטה קרלו הישירה (Bird 1994) או על ידי פתרון נומרי ישיר של משוואת בולצמן (Darbandi & Roohi 2011; Mahdavi 2014; Mahdavi & Roohi 2015). לאחרונה הופיעו עדויות בספרות על הופעת ניתוקי זרימה בזרימות בתעלות גם במספרי קנווסן גבוהים (Manela & Gibelli 2020). מכיוון שכך, קיימת חשיבות בתיאור הגבולי של זרימות חסרות התנגשויות (במספרי קנווסן גדולים מאוד), כנקודת מוצא לחקירות המשך של תנאי הניתוק במקרים אלו. בעבודה זו נדון בתצורת תעלה מיקרונית החסומה חלקית על ידי קיר אנכי, ונקבל את משטר הזרימה הבליסטי בה.

## הצגת הבעיה

פרויקט המחקר עוסק בבעיה דו-ממדית, תמידית בגבול הבליסטי בו החלקיקים לא מתנגשים אחד עם השני, אלא רק עם הקירות. הגיאומטריה הינה תעלה דו-ממדית באורך  $l^*$  וגובה  $h^*$ , עם מחסום אנכי באורך  $l_b^*$ , הנמצא במרחק  $l_1^*$  מהקצה השמאלי של התעלה ובמרחק  $l_2^*$  מהקצה הימני שלה. מערכת הצירים הינה ציר  $x$ , בכיוון האופקי - לאורך התעלה וציר  $y$ , בכיוון האנכי - לרוחב התעלה. בכניסה - הקצה השמאלי של התעלה יש מאגר-כניסה המכיל גז בשיווי משקל הנמצא במנוחה עם צפיפות וטמפרטורה אשר נקבעים עבור הבעיה  $\rho_{in}^*, T_{in}^*$ , באופן זהה לחלוטין עבור היציאה - הקצה הימני של התעלה יש מאגר יציאה בעל הפרמטרים  $\rho_{out}^*, T_{out}^*$  אשר גם כן נקבעים מראש עבור הבעיה. הבעיה מתוארת באופן סכמתי באיור 1:



איור 1 – סכמת הבעיה

את הבעיה נפתור עבור קירות מסוג Diffuse.

## הבעיה המתמטית

### משוואת בולצמן

משוואת בולצמן התלת-ממדית, לא תמידית, עם כוחות גוף ועם התנגשויות, תחת הנחת הכאוס המולקולרי, התנגשויות בינאריות בלבד וסקלת מפגש קצרה ביחס למהלך החופשי הממוצע הינה:

$$1() \quad \frac{\partial f^*}{\partial t^*} + \xi^* \cdot \nabla_{\tilde{x}^*} f^* + \frac{\bar{X}_0^*}{m^*} \cdot \nabla_{\xi^*} f^* = J^*$$

כאשר-

$f = f(t, \tilde{x}, \xi)$  – פונקציות צפיפות ההסתברות למציאת חלקיק בזמן  $t$ , במיקום  $\tilde{x}$  ובמהירות מולקולרית  $\xi$ .

$\bar{X}_0 = \bar{X}_0(t, \tilde{x})$  – כוח גוף הפועל על החלקיק כתלות בזמן ובמיקום שלו.

$m$  – מסת החלקיק.

$J = J(t, \tilde{x}, \tilde{\xi})$  - איבר ההתנגשויות אשר ממדל את ההתנגשויות בין החלקיקים כתלות בזמן, במיקום ובמהירות המולקולרית שלהם.

בדוח זה נעסוק בבעיה דו-ממדית, תמידית, ללא כוחות גוף. משוואת בולצמן עבור ההנחות האלו הינה:

$$2() \quad \xi_x^* \cdot \frac{\partial f^*}{\partial x^*} + \xi_y^* \cdot \frac{\partial f^*}{\partial y^*} = J^*$$

### נרמול

נגדיר סקלת אורך על ידי גובה התעלה  $h^*$ , סקלת טמפרטורה על ידי טמפרטורת הגז במאגר הכניסה  $T_0^*$ , סקלת מהירות על ידי המהירות התרמית בעלת ההסתברות הגבוהה ביותר  $\sqrt{2R^*T_{in}^*}$  כאשר  $R^*$  הינו קבוע הגזים, סקלת צפיפות על ידי צפיפות הגז במאגר הכניסה  $\rho_0^*$  וסקלת מסה על ידי מסת חלקיק בודד  $m^*$ . בהתאם לסקלות הללו ננרמל את  $f$ .

$$3() \quad \xi^* = \sqrt{2R^*T_{in}^*} \cdot \xi, x^* = h^* \cdot x, y^* = h^* \cdot y, \rho^* = \rho_{in}^* \cdot \rho$$

$$T^* = T_{in}^* \cdot T, f^* = \frac{\rho_{in}^*}{m^*(2R^*T_{in}^*)^{\frac{3}{2}}} \cdot f$$

### משוואת בולצמן המנורמלת

ברישום חסר-ממד של המשוואה נקבל:

$$4() \quad \xi_x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \xi_y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{Kn} J$$

$Kn$  – מספר קנוודסן, היחס בין המהלך החופשי הממוצע לסקלת אורך אופיינית של הבעיה.

כיוון שבדוח זה נעסוק בבעיה ללא התנגשויות בין החלקיקים המהלך החופשי הממוצע של החלקיק שואף לאינסוף. ולכן  $Kn \rightarrow \infty$ .

בסופו של דבר נקבל את המשוואה המנורמלת אותה נפתור:

$$5() \quad \xi_x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \xi_y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

### פילוג מקסוול

פילוג מקסוול זהו פילוג שיווי משקל של  $f$ , פילוג זה פותר במדויק את משוואת בולצמן.

$$6() \quad f_M^* = n^* \left( \frac{1}{2\pi R^*T^*} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \exp\left( -\frac{c^{*2}}{2R^*T^*} \right), \tilde{c}^* = \tilde{\xi}^* - \tilde{u}^*$$

כאשר  $\tilde{u}^*$  הינה המהירות המקרוסקופית של הגז – מהירות הזורם.

ו -  $n^*$  הינה הצפיפות המספרית של הגז.

עבור מאגרי הכניסה והיציאה אשר כאמור נמצאים במנוחה פילוג הגז הינו:

$$7() \quad f_M^{in*} = n^* \left( \frac{1}{2\pi R^* T_{in}^*} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{\xi^{*2}}{2R^* T_{in}^*}\right)$$

$$8() \quad f_M^{out*} = n^* \left( \frac{1}{2\pi R^* T_{out}^*} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{\xi^{*2}}{2R^* T_{out}^*}\right)$$

פילוגי מקסוול המנורמלים של הכניסה והיציאה:

$$9() \quad f_M^{in} = \frac{1}{\pi^2} \cdot \exp(-\xi^2), \quad f_M^{out} = \frac{\rho_{out}}{(T_{out}\pi)^{\frac{3}{2}}} \cdot \exp\left(-\frac{\xi^2}{T_{out}}\right)$$

### תנאי שפה Diffuse

תנאי שפה Diffuse, הינו תנאי שפה אשר אומר כי חלקיק אשר פגע בקיר יחזור עם פילוג מקסוול של הקיר. החלקיק מגיע לקיר עם פילוג מקסוול קודם (של אחד ממאגרי הכניסה/יציאה או של קיר אחר שפגע בו לפני) ולאחר הפגיעה בקיר אין משמעות להיכן היה החלקיק לפני הפגיעה בקיר. מתמטית הפילוג של החלקיקים אשר חוזרים מנקודה מסוימת על הקיר הינו:

$$10() \quad f_w = \frac{\rho_w(x_w, y_w)}{(T_w\pi)^{\frac{3}{2}}} \cdot \exp\left(-\frac{\xi^2}{T_w}\right)$$

כאשר  $T_w$  הינה טמפרטורת הקיר והיא קבועה במקרה שלנו,  $\rho_w(x_w, y_w)$  אמנם רשום כפונקציה של שני משתנים אך בפועל בבעיה שלנו בכל קיר זוהי פונקציה של משתנה אחד מכיוון שכל הקירות מאונכים למערכת הצירים.

### ניסוח הבעיה המתמטית

$$\xi_x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \xi_y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \text{ at } -l_1 < x < l_2, 0 < y < 1$$

$$11() \quad f(x = -l_1, y, \xi_x > 0) = \frac{1}{\pi^2} \cdot \exp(-\xi^2), \quad 0 < y < 1$$

$$f(x = l_2, y, \xi_x < 0) = \frac{\rho_{out}}{(T_{out}\pi)^{\frac{3}{2}}} \cdot \exp\left(-\frac{\xi^2}{T_{out}}\right), \quad 0 < y < 1$$

$$f(x_w, y_w, \xi \cdot \hat{n} > 0) = \frac{\rho_w(x_w, y_w)}{(T_w \pi)^{\frac{3}{2}}} \cdot \exp\left(-\frac{\xi^2}{T_w}\right)$$

כאשר,  $\hat{n}$  הינו וקטור נורמלי לקיר באורך יחידה הפונה לתוך התעלה. במקרה של המחסום אשר לו שני צדדים, מכל צד החלקיק יחזור עם פילוג מקסוול של הצד של הקיר בו התנגש (חישובית נפריד את המחסום לשני קירות שונים).

### פתרון שדה הזרימה

פתרון של (11) מניב את פונקציות צפיפות ההסתברות למציאת חלקיק במקום מסוים במהירות מסוימת אך מה שמעניין אותנו הוא נתונים מקרוסקופיים של שדה הזרימה, צפיפות, מהירות, לחץ וטמפרטורה. את שדה הזרימה מקבלים ממומנטים של פונקציות צפיפות ההסתברות:

$$\rho(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f d\xi, \quad u_i = \frac{1}{\rho(x, y)} \int_{-\infty}^{\infty} \xi_i f d\xi \quad | \quad i = x, y$$

$$12(1) \quad p(x, y) = \frac{2}{3} \int_{-\infty}^{\infty} [(\xi_x - u_x)^2 + (\xi_y - u_y)^2 + \xi_z^2] f d\xi$$

$$T = \frac{p}{\rho}$$

## סכמת הפתרון

### פילוג מקסוול של הקיר

בשלב הראשון עלינו למצוא את פילוג מקסוול של על מנת שנוכל אחרי זה לחשב את פונקציות צפיפות ההסתברות בכל השדה. את פילוג מקסוול של הקיר נמצא מתוך תנאי אי-חדירה. מתוך ההנחה כי החלקיקים אשר מתנגשים בקיר חוזרים ממנו, כלומר חלקיקים לא נשארים על הקיר נובע כי הספיקה המסית של החלקיקים הפוגעים בקיר שווה לזו של החוזרים ממנו:

$$13(1) \quad \int_{\xi \cdot \hat{n} > 0} (\xi \cdot \hat{n}) f(x_w, y_w, \xi) d\xi + \int_{\xi \cdot \hat{n} < 0} (\xi \cdot \hat{n}) f(x_w, y_w, \xi) d\xi = 0$$

נזכור כי הצורה של  $f(x_w, y_w, \xi)$  הינה לפי (10), ולכן בכל נקודה בה נחשב את תנאי (12) נחלק את גבולות האינטגרל לחלקים לפי הקיר/מאגר ממנו הגיעו החלקיקים. נבצע דיסקרטיזציה על כל הקירות ובכל נקודה נחשב את תנאי אי החדירה, נקבל בעיה מהצורה:

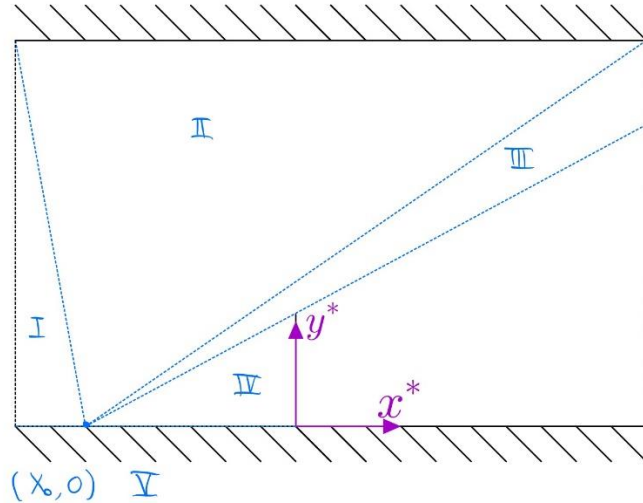
$$14(1) \quad \tilde{F} = \tilde{K} \cdot \tilde{\rho}$$

כאשר  $\tilde{\rho}$  הינה פונקציית הצפיפות של ההתפלגות של הקיר, יש לשים לב כי אין לה משמעות אמיתית של צפיפות אלא היא פרמטר של הפילוג של  $f(x_w, y_w, \xi)$ ,  $\tilde{K}$  היא מטריצת האינטגרל של החלקיקים

המגיעים מהקירות השונים ו  $\vec{F}$  הוא הווקטור המאלץ אשר נובע מהחלקיקים המגיעים ממאגרי הכניסה/יציאה הידועים.

נדגים את החישוב עבור נקודה מסוימת בבעיה :

נבחר נקודה על השפה התחתונה של התעלה מצדו השמאלי של המחסום כפי הנראה באיור 2 :



איור 2 – תחומי אינטגרציה לתנאי אי-חדירה

נחשב לפי נוסחה (12), האינטגרל הראשון הינו זה אשר מסומן באיור 2 כאזור V :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\vec{\xi} \cdot \hat{n} > 0} (\vec{\xi} \cdot \hat{n}) f(x_w, y_w, \vec{\xi}) d\vec{\xi} = \\
 15() & = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \xi_y \cdot \frac{\rho_{l1}(x_0)}{(\pi T_w)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{T_w}\right) d\xi_y d\xi_x d\xi_z = \frac{T_w^{\frac{1}{2}}}{2\pi^{\frac{1}{2}}} \rho_{l1}(x_0)
 \end{aligned}$$

את האינטגרל השני ב (12) נחלק לפי התחומים מהם החלקיקים מגיעים לפי הסימונים I-IV באיור 2.

:I

$$\begin{aligned}
 16() & \int_{\vec{\xi} \cdot \hat{n} < 0, I} (\vec{\xi} \cdot \hat{n}) f d\vec{\xi} = \int_{-\infty}^0 \int_{|\xi_y|(l_1+x)}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \xi_y \cdot \frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}}} \exp(-\xi^2) d\xi_z d\xi_x d\xi_y \\
 & = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \left( \frac{l_1+x}{\sqrt{1+(l_1+x)^2}} - 1 \right)
 \end{aligned}$$

:II



$$\begin{aligned}
& \int_{\tilde{\xi} \cdot \hat{n} < 0, II} (\tilde{\xi} \cdot \hat{n}) f d\tilde{\xi} = \\
17() & = \int_{-\infty}^0 \int_{|\xi_y|(x-l_2)}^{|\xi_y|(l_1+x)} \int_{-\infty}^{\infty} \xi_y \cdot \frac{\rho_l(x) \cdot \left(x - \frac{\xi_x}{|\xi_y|}\right)}{(T_w \pi)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{T_w}\right) d\xi_z d\xi_x d\xi_y \\
& = -\frac{\sqrt{T_w}}{4\sqrt{\pi}} \int_{-l_1}^{l_2} \frac{\rho_l(u) du}{[1 + (u-x)^2]^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

: III

$$\begin{aligned}
& \int_{\tilde{\xi} \cdot \hat{n} < 0, III} (\tilde{\xi} \cdot \hat{n}) f d\tilde{\xi} = \\
18() & \int_{-\infty}^0 \int_{\frac{x}{l_b}|\xi_y|}^{|\xi_y|(x-l_2)} \int_{-\infty}^{\infty} \xi_y \cdot \frac{\rho_{out}}{(T_{out} \pi)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{T_{out}}\right) d\xi_z d\xi_x d\xi_y = \\
& \frac{\rho_{out}}{4\sqrt{\pi T_{out}}} \left( \frac{x T_{out}}{\sqrt{l_b^2 + x^2}} - \frac{(x-l_2) T_{out}}{\sqrt{1 + (x-l_2)^2}} \right)
\end{aligned}$$

: IV

$$\begin{aligned}
& \int_{\tilde{\xi} \cdot \hat{n} < 0, IV} (\tilde{\xi} \cdot \hat{n}) f d\tilde{\xi} = \\
19() & \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^{\frac{x}{l_b}|\xi_y|} \int_{-\infty}^{\infty} \xi_y \cdot \frac{\rho_{bleft}(y) \cdot \left(\frac{|\xi_y|}{\xi_x} x\right)}{(T_w \pi)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{T_w}\right) d\xi_z d\xi_x d\xi_y = \\
& \frac{x}{4} \sqrt{\frac{T_w}{\pi}} \int_0^{l_b} \frac{\rho_{bleft}(u) \cdot u du}{[u^2 + x^2]^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

נוסיף כהערה כי אם  $x_0 > \frac{l_b l_2}{l_b - 1}$  אז האינטגרל על אזור III יתאפס זהותית, באופן דומה עבור שאר הקירות חלק מהאינטגרלים מתאפסים תחת תנאים דומים. כלומר אם אין קו ראייה בין החלקיקים המגיעים מחדך היציאה לנקודה בה מחשבים את תנאי אי-החדירה לא תהיה השפעה של חלקיקים אלו באופן ישיר על  $\rho_{l1}(x_0)$ .

הסימונים  $\rho_{b_{left}}, \rho_{b_{right}}$  מתייחסים לפונקציות הצפיפות של פילוג המחסום מצדו הימני והשמאלי בהתאמה.

לסיכום, תנאי אי-החדירה עבור  $y = 0, -l_1 \leq x \leq 0$

$$\begin{aligned}
 & \frac{T_w^{\frac{1}{2}}}{2\pi^{\frac{1}{2}}} \rho_{l_1}(x) + \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \left( \frac{l_1 + x}{\sqrt{1 + (l_1 + x)^2}} - 1 \right) \\
 & - \frac{\sqrt{T_w}}{4\sqrt{\pi}} \int_{-l_1}^{l_2} \frac{\rho_l(u) du}{[1 + (u - x)^2]^{\frac{3}{2}}} \\
 20() & + \frac{\rho_{out}}{4\sqrt{\pi} T_{out}} \left( \frac{x T_{out}}{\sqrt{l_b^2 + x^2}} - \frac{(x - l_2) T_{out}}{\sqrt{1 + (x - l_2)^2}} \right) \\
 & + \frac{x}{4} \sqrt{\frac{T_b}{\pi}} \int_0^{l_b} \frac{\rho_{b_{left}}(u) \cdot u du}{[u^2 + x^2]^{\frac{3}{2}}} = 0
 \end{aligned}$$

באופן דומה, עבור שאר הקירות נקבל:

עבור  $x = 0^-, 0 \leq y \leq l_b$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{T_b^{\frac{1}{2}}}{2\pi^{\frac{1}{2}}} \rho_{b_{left}}(x) + \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \left( \frac{y}{\sqrt{l_1^2 + y^2}} - \frac{y - 1}{\sqrt{l_1^2 + (y - 1)^2}} \right) \\
 21() & - \frac{y\sqrt{T_w}}{4\sqrt{\pi}} \int_{-l_1}^0 \frac{\rho_{l_1}(u) u du}{[u^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{(1 - y)\sqrt{T_w}}{4\sqrt{\pi}} \int_{-l_1}^0 \frac{\rho_l(u) u du}{[u^2 + (1 - y)^2]^{\frac{3}{2}}} = 0
 \end{aligned}$$

עבור  $x = 0^+, 0 \leq y \leq l_b$

$$\begin{aligned}
 & \frac{T_b^{\frac{1}{2}}}{2\pi^{\frac{1}{2}}} \rho_{b_{right}}(x) + \frac{\rho_{out}\sqrt{T_{out}}}{4\sqrt{\pi}} \left( \frac{y - 1}{\sqrt{l_2^2 + (y - 1)^2}} - \frac{y}{\sqrt{l_1^2 + y^2}} \right) \\
 22() & - \frac{y\sqrt{T_w}}{4\sqrt{\pi}} \int_0^{l_2} \frac{\rho_{l_2}(u) u du}{[u^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{(1 - y)\sqrt{T_w}}{4\sqrt{\pi}} \int_0^{l_2} \frac{\rho_l(u) u du}{[u^2 + (1 - y)^2]^{\frac{3}{2}}} = 0
 \end{aligned}$$

עבור  $y = 0, 0 \leq x \leq l_2$

$$\begin{aligned}
& \frac{T_w^{\frac{1}{2}}}{2\pi^{\frac{1}{2}}} \rho_{l_2}(x) + \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \left( \frac{l_1 + x}{\sqrt{1 + (l_1 + x)^2}} - \frac{x}{\sqrt{l_b^2 + x^2}} \right) \\
& \quad - \frac{\sqrt{T_w}}{4\sqrt{\pi}} \int_{-l_1}^{l_2} \frac{\rho_l(u) du}{[1 + (u - x)^2]^{\frac{3}{2}}} \\
23() & \quad + \frac{\rho_{out} \sqrt{T_{out}}}{4\sqrt{\pi}} \left( \frac{(l_2 - x)}{\sqrt{1 + (x - l_2)^2}} - 1 \right) \\
& \quad - \frac{x}{4} \sqrt{\frac{T_b}{\pi}} \int_0^{l_b} \frac{\rho_{b_{right}}(u) \cdot u du}{[u^2 + x^2]^{\frac{3}{2}}} = 0 \\
& \qquad \qquad \qquad : y = 1, 0 \leq x \leq l_2 \text{ עבור}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{T_w^{\frac{1}{2}}}{2\pi^{\frac{1}{2}}} \rho_l(x) - \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \left( \frac{l_1 + x}{\sqrt{1 + (l_1 + x)^2}} - 1 \right) \\
& + \frac{\sqrt{T_w}}{4\sqrt{\pi}} \int_0^{l_2} \frac{\rho_{l_2}(u) du}{[1 + (u - x)^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{\sqrt{T_w}}{4\sqrt{\pi}} \int_{-l_1}^{x(1 - \frac{1}{1 - l_b})} \frac{\rho_{l_1}(u) du}{[1 + (u - x)^2]^{\frac{3}{2}}} \\
24() & \quad - \frac{\rho_{out} \sqrt{T_{out}}}{4\sqrt{\pi}} \left( \frac{(l_2 - x)}{\sqrt{1 + (x - l_2)^2}} - 1 \right) \\
& \quad - \frac{x}{4} \sqrt{\frac{T_b}{\pi}} \int_0^{l_b} \frac{\rho_{b_{right}}(u) \cdot (u - 1) du}{[(u - 1)^2 + x^2]^{\frac{3}{2}}} = 0 \\
& \qquad \qquad \qquad : y = 1, -l_1 \leq x \leq 0 \text{ עבור}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{T_w^{\frac{1}{2}}}{2\pi^{\frac{1}{2}}} \rho_l(x) - \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \left( \frac{l_1 + x}{\sqrt{1 + (l_1 + x)^2}} - 1 \right) \\
25() & \quad + \frac{\sqrt{T_w}}{4\sqrt{\pi}} \int_{x(1 - \frac{1}{1 - l_b})}^{l_2} \frac{\rho_{l_2}(u) du}{[1 + (u - x)^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{\sqrt{T_w}}{4\sqrt{\pi}} \int_{-l_1}^{x_0} \frac{\rho_{l_1}(u) du}{[1 + (u - x)^2]^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

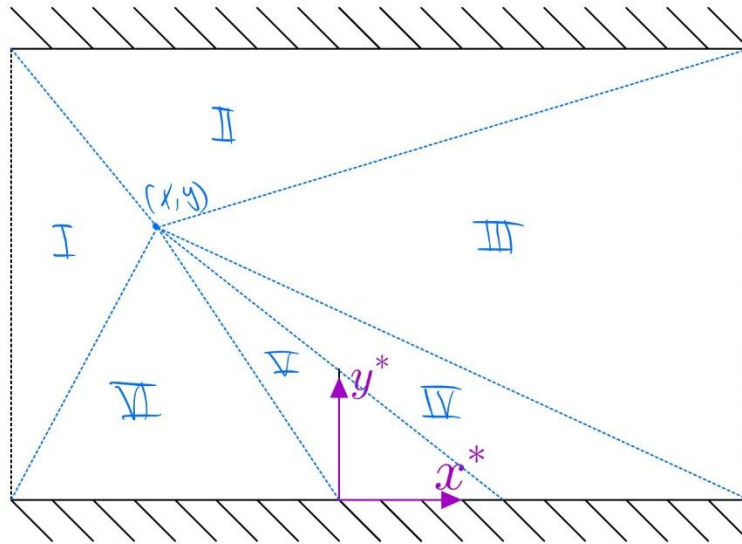
$$-\frac{\rho_{out}\sqrt{T_{out}}}{4\sqrt{\pi}}\left(\frac{(l_2-x)}{\sqrt{1+(x-l_2)^2}}-1\right) + \frac{x}{4}\sqrt{\frac{T_b}{\pi}}\int_0^{l_b}\frac{\rho_{bleft}(u)\cdot(u-1)du}{[(u-1)^2+x^2]^{\frac{3}{2}}}=0$$

באופן דומה, נפתח את הביטויים לשאר השפות. כאשר את האינטגרלים נחשב לפי שיטת הטרפז  
 לינאריות מצומדות כמספר נקודות הדיסקרטיזציה שנבחר לפי משוואה (14). מתוך פתרון המערכת  
 נקבל את פונקציות הצפיפות של פילוג השפות:  $\rho_{l1}(x), \rho_{l2}(x), \rho_l(x), \rho_{bleft}(y), \rho_{bright}(y)$ .  
 את פילוג מקסוול של הקיר נקבל על ידי הצבה של פונקציית הצפיפות המתאימה למשוואה (10).

### חישוב השדות ההידרודינמיים

את חישוב השדות ההידרודינמיים נעשה לפי חישוב המומנטים של פונקציית צפיפות ההסתברות כפי  
 שהוצג בנוסחה (12).

נדגים את אופן החישוב עבור נקודה כלשהי בשדה:



איור 3 – תחומי אינטגרציה לחישוב השדות ההידרודינמיים

באופן הכללי ביותר האינטגרל אשר עלינו לחשב הינו:

$$26(1) \quad M(\tilde{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tilde{x}, \tilde{\xi}) \cdot f(\tilde{x}, \tilde{\xi}) d\tilde{\xi} =$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty \int_{\frac{y-1}{l_1+x}\xi_x}^{\frac{y}{l_1+x}\xi_x} \int_{-\infty}^\infty g(\tilde{x}, \tilde{\xi}) \cdot f_{in}(\tilde{x}, \tilde{\xi}) d\xi_z d\xi_y d\xi_x \\
& + \int_{-\infty}^0 \int_{\frac{l_1+x}{y-1}\xi_y}^{\frac{l_1+x}{y-1}\xi_y} \int_{-\infty}^\infty g(\tilde{x}, \tilde{\xi}) \cdot f_l(\tilde{x}, \tilde{\xi}) d\xi_z d\xi_x d\xi_y \\
& + \int_{-\infty}^0 \int_{\frac{1-y}{l_2-x}\xi_x}^{\frac{y}{x-l_2}\xi_x} \int_{-\infty}^\infty g(\tilde{x}, \tilde{\xi}) \cdot f_{out}(\tilde{x}, \tilde{\xi}) d\xi_z d\xi_y d\xi_x \\
& + \int_0^\infty \int_{\frac{x-l_2}{y}\xi_y}^{\frac{\xi_y x}{y} (1 - \frac{l_b}{l_b-y})} \int_{-\infty}^\infty g(\tilde{x}, \tilde{\xi}) \cdot f_{l_2}(\tilde{x}, \tilde{\xi}) d\xi_z d\xi_x d\xi_y \\
& + \int_{-\infty}^0 \int_{\frac{y}{x}\xi_x}^{\frac{y}{x}\xi_x} \int_{-\infty}^\infty g(\tilde{x}, \tilde{\xi}) \cdot f_{b_{left}}(\tilde{x}, \tilde{\xi}) d\xi_z d\xi_y d\xi_x \\
& + \int_0^\infty \int_{\frac{x}{y}\xi_y}^{\frac{l_1+x}{y}\xi_y} \int_{-\infty}^\infty g(\tilde{x}, \tilde{\xi}) \cdot f_{l_1}(\tilde{x}, \tilde{\xi}) d\xi_z d\xi_x d\xi_y
\end{aligned}$$

כאשר  $g(\tilde{x}, \tilde{\xi})$  היא פונקציה ידועה. החישוב עבור נקודות אחרות בתעלה נעשה באופן דומה לפי חלוקה לתחומים מהם מגיעים החלקיקים ופתרון האינטגרל בגבולות השונים. חלק מהאינטגרלים ניתן לחשב באופן סגור וחלק באופן נומרי ולקבל את השדות ההידרודינמיים בכל התעלה.

### חישוב הספיקה והכוח על הקיר

הספיקה המסית ליחידת אורך (במקרה המנורמל גם שווה לספיקה הנפחית) נתונה על ידי אינטגרל על חתך כלשהו לבחירתנו שכן הבעיה הינה תמידית, של הספיקה המסית בכיוון הניצב לחתכי הכניסה/יציאה:

$$27() \quad \dot{m} = \int_0^1 \rho(x_0, y) \cdot u(x_0, y) dy$$

חישוב הכוח הנורמלי נעשה על ידי אינטגרל על הפרש המאמצים הנורמליים בין שני צידי הפרעה:

$$28() \quad F_{normal} = \int_0^{l_b} [P_{xx}(0^-, y) - P_{xx}(0^+, y)] dy$$

באופן דומה, כוח הגזירה מחושב כאשר המאמצים הנורמליים מוחלפים במאמץ המעורב:

$$29() \quad F_{shear} = \int_0^{l_b} [P_{xy}(0^-, y) - P_{xy}(0^+, y)] dy$$

## תוצאות מספריות

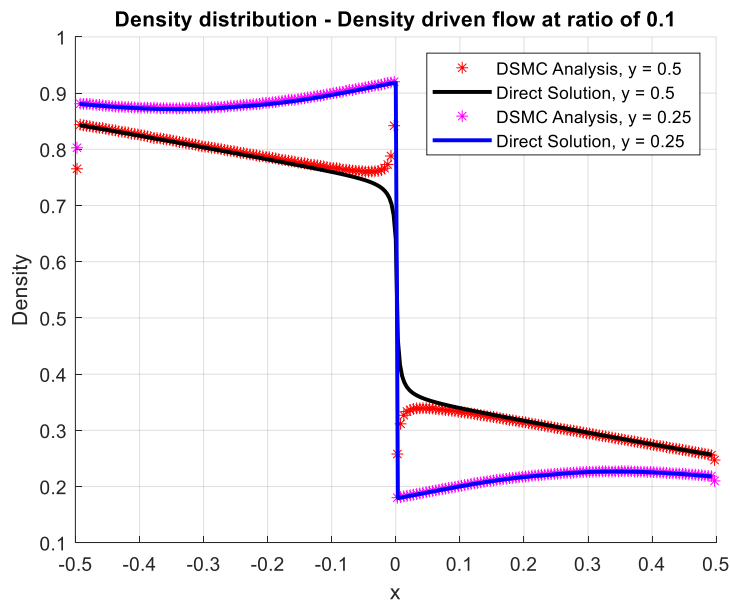
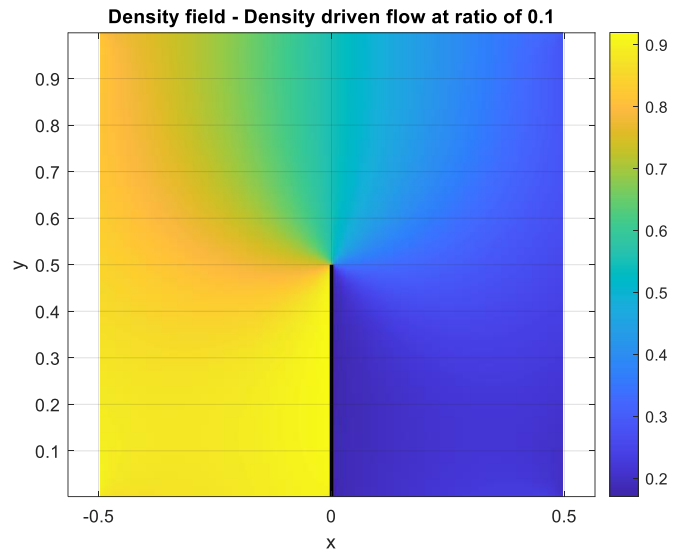
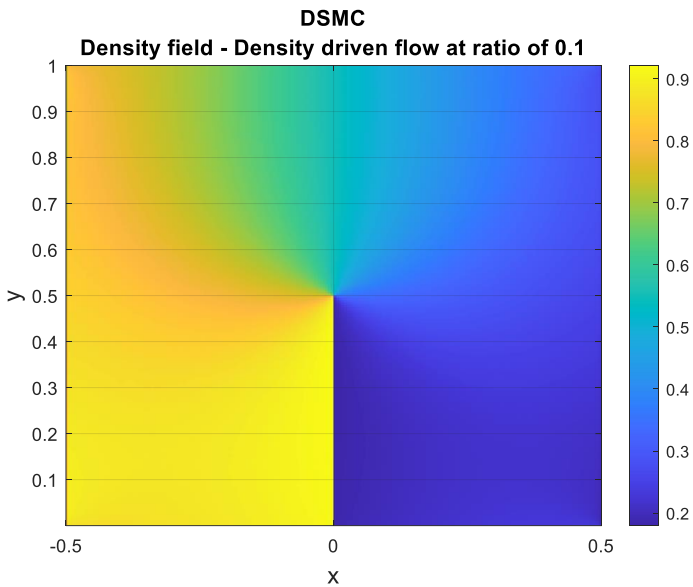
נציג בפרק זה את שדות המהירות והצפיפות ההידרודינמית, בנוסף נציג את הספיקה המסית עבור פרמטרים שונים של תנאי שפה – זרימה מונעת מיחס צפיפויות ומיחס טמפרטורות בנפרד.

את החישובים המספריים נציג עבור הפרמטרים הבאים:

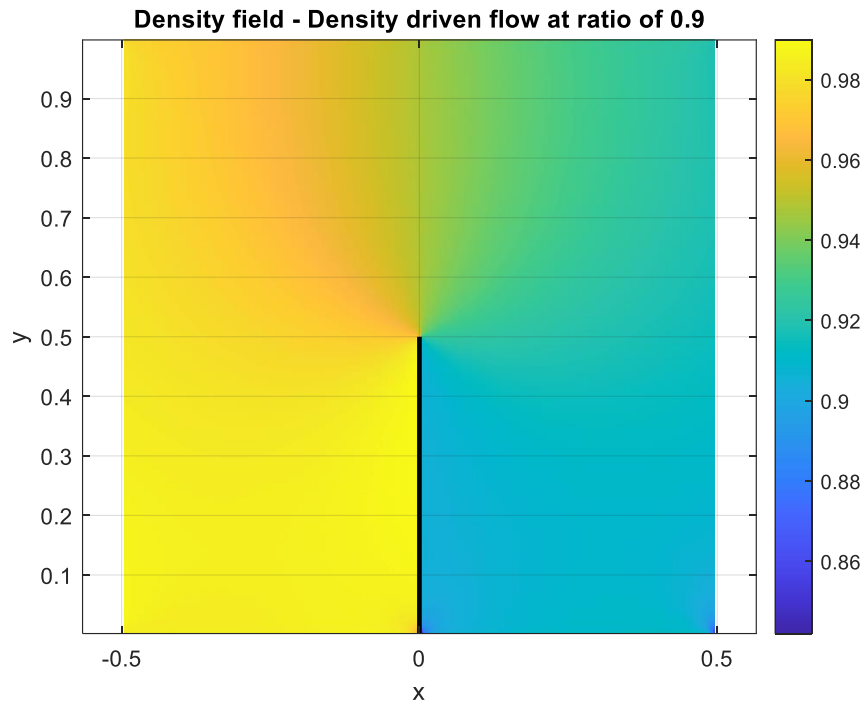
$$l_1 = l_2 = 0.5 ; l = 1 , h_b = 0.5 , T_w = 1$$

התוצאות שהוצגו הושאו לחישובי סימולציית מונטה קרלו (Bird 1994) והתקבלה התאמה טובה מאוד בין שתי שיטות הפתרון.

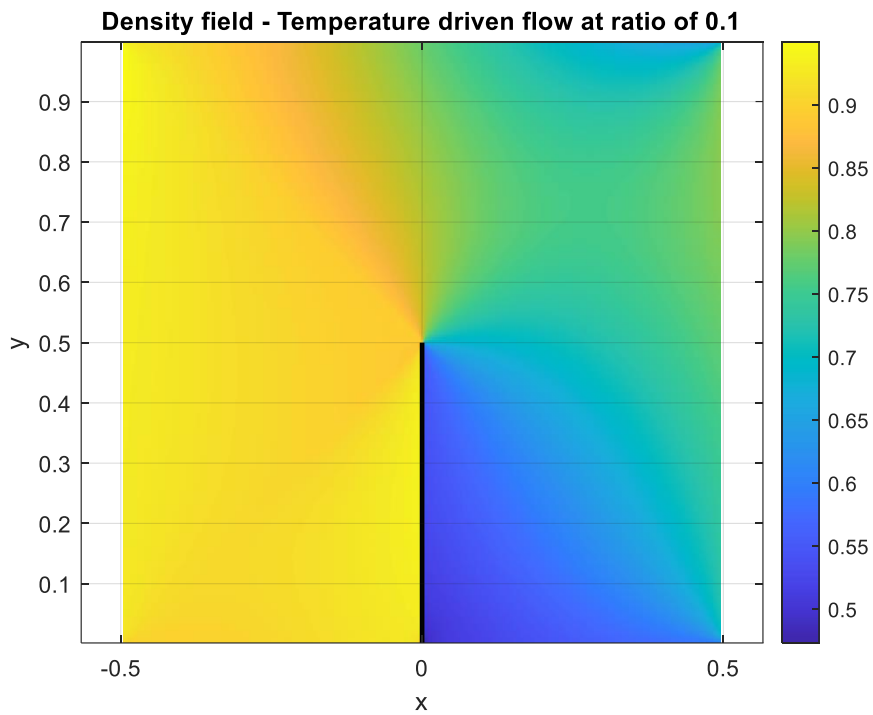
שדות הצפיפות ההידרודינמית:



איור 4- שדה הצפיפות עבור זרימה ביחס צפיפויות של 0.1

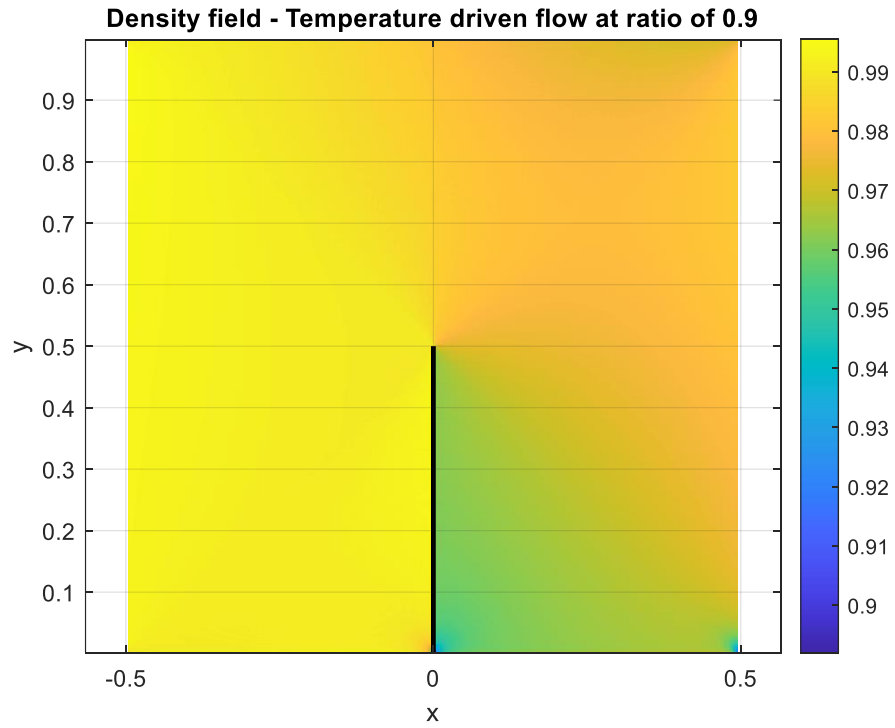


איור 5 - שדה הצפיפות עבור זרימה ביחס צפיפויות של 0.9



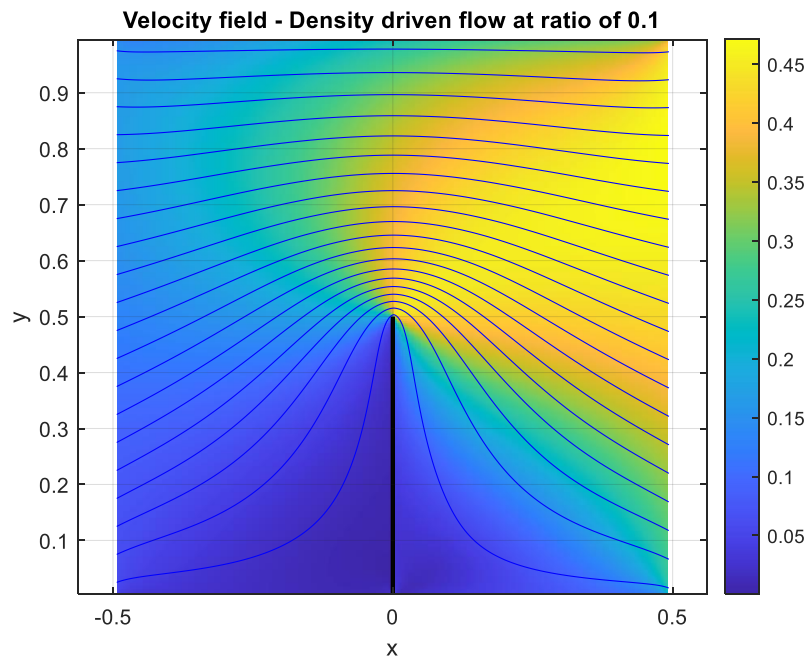
איור 6 - שדה הצפיפות עבור זרימה ביחס טמפרטורות של 0.1



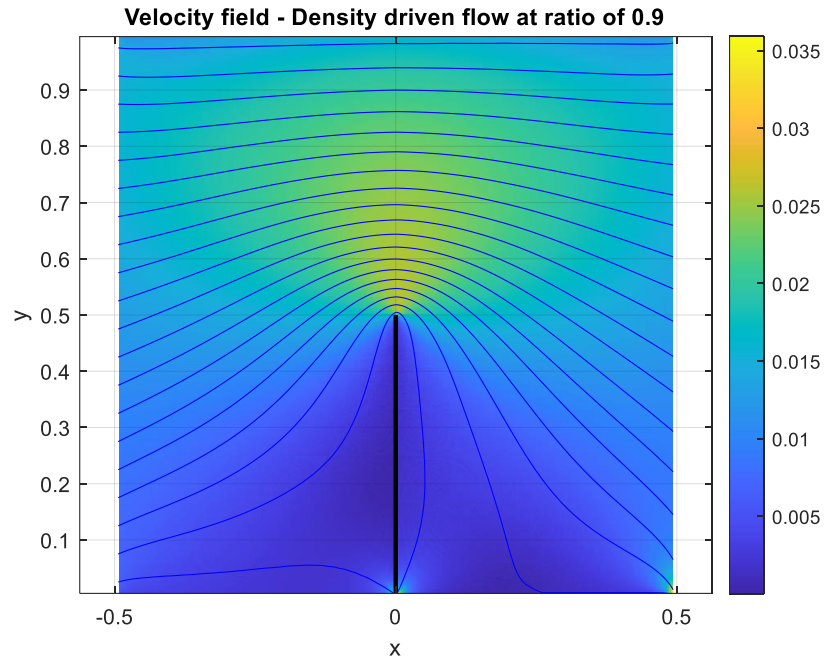


איור 7 - שדה הצפיפות עבור זרימה ביחס טמפרטורות של 0.9

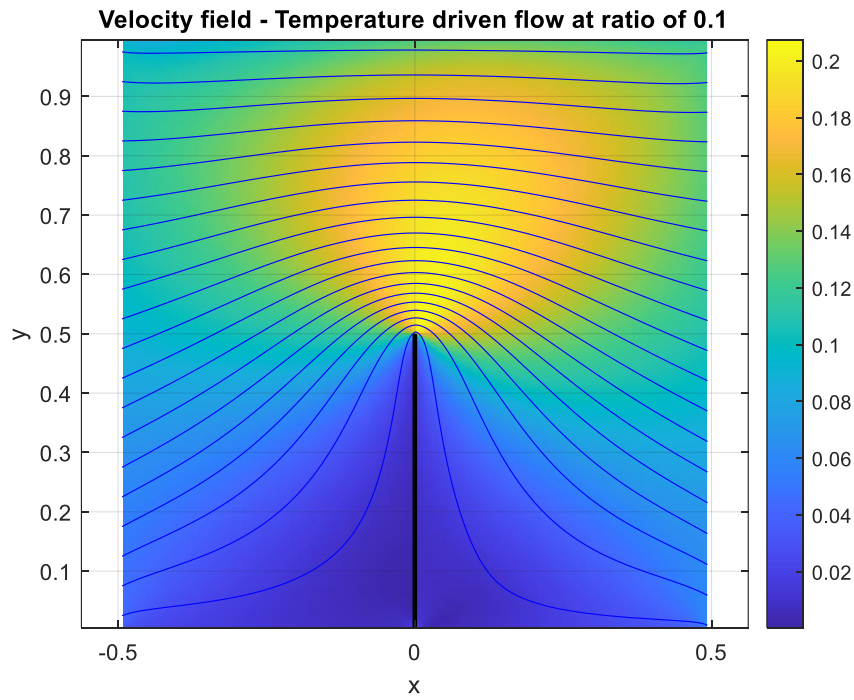
שדות המהירות ההידרודינמית – הצבע מייצג את גודל המהירות, הקווים הינם קווי זרם



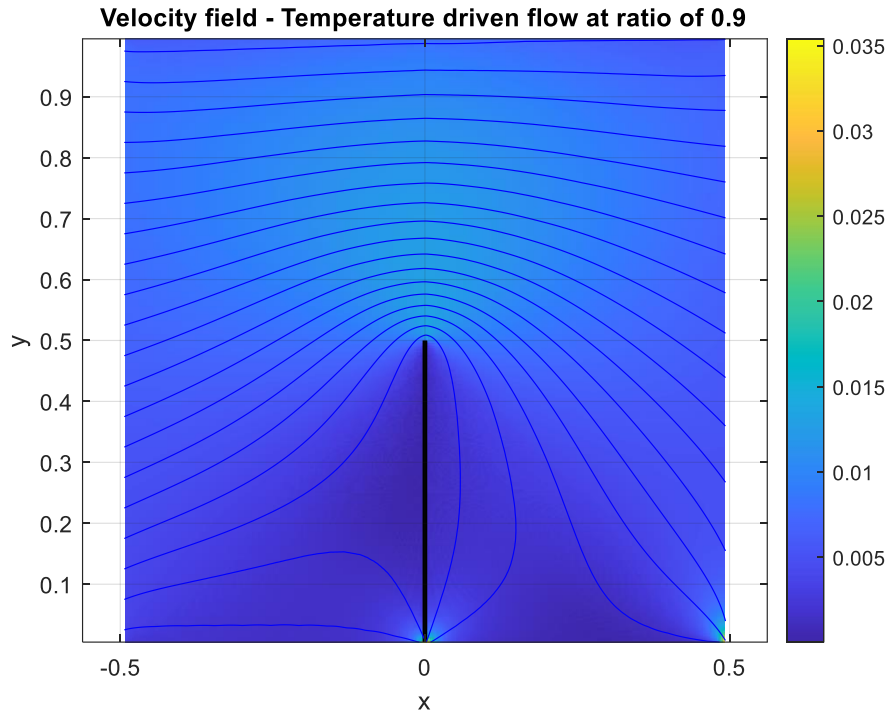
איור 8 - שדה המהירות עבור זרימה ביחס צפיפויות של 0.1



איור 9 - שדה המהירות עבור זרימה ביחס צפיפויות של 0.9



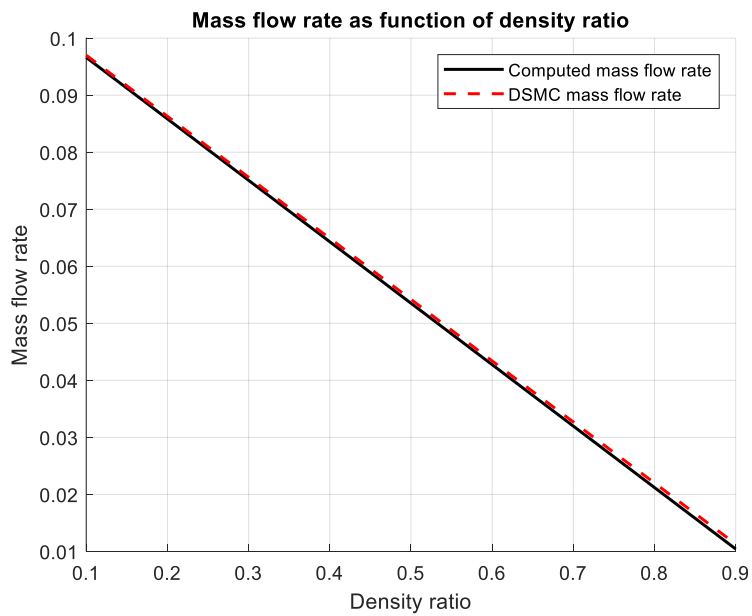
איור 10 - שדה המהירות עבור זרימה ביחס טמפרטורות של 0.1



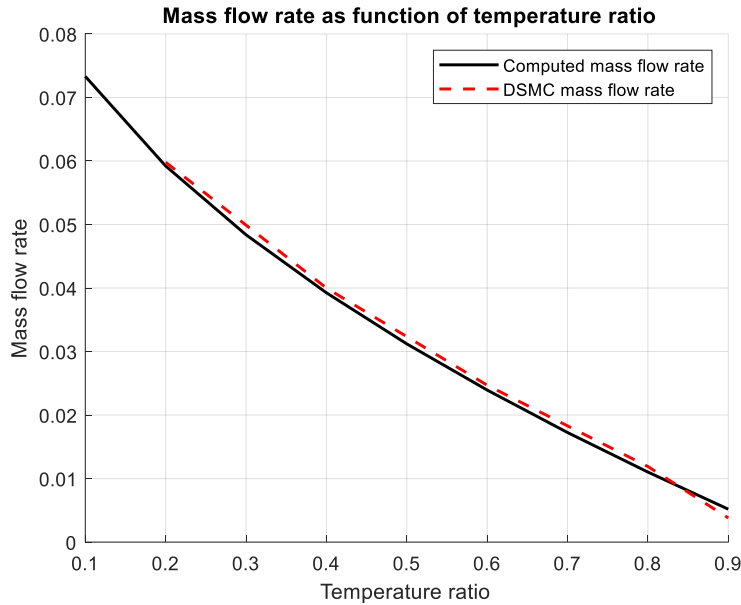
איור 11 - שדה המהירות עבור זרימה ביחס טמפרטורות של 0.9

### ספיקה מסית

נשווה את הספיקה המסית ליחסי צפיפויות שונים ויחסי טמפרטורות שונים מול חישוב סימולצית מונטה קרלו (DSMC) של הבעיה.



איור 12 – ספיקה מסית עבור יחסי צפיפויות שונים



איור 13 - ספיקה מסית עבור יחסי טמפרטורה שונים

## דיון בתוצאות

ראשית, נתייחס להשוואה לסימולציית DSMC, זוהי שיטה שונה לחלוטין מהשיטה בה פתרנו את הבעיה ולכן העובדה כי שתי השיטות מציגות תוצאות דומות מאוד אחת לשנייה (ניתן לראות זאת באיור 4, באיור 12 ואיור 13) ממחישה כי התוצאות הן טובות, באיור 4 מוצג לצד השדה המחושב בצד ימין, שדה הצפיפות הנוצר מסימולציית מונטה קרלו בצד שמאל והשוואה עבור שני ערכי  $Y$  שונים לאורך ציר  $X$ , ניתן לראות את ההתאמה המעולה בין שתי שיטות החישוב.

נתייחס לתופעה אשר אנו רואים באיור 11 ובאיור 9, ניתן לראות קווי זרם אשר לא עוברים את המחסום ומסתיימים בראשית הצירים מכיוון הרביע השלישי וקווי זרם אשר עוברים את המחסום וגם הם מסתיימים בראשית הצירים מכיוון הרביע השני. זוהי תופעה מעניינת אשר מתרחשת עבור יחסי צפיפות וטמפרטורה נמוכים ומתקרבים ל1 ואולי מעידה כי עבור מספרי קונדסן גדולים אך סופיים ניתן יהיה לקבל ניתוק זרימה באזור זה, ובהחלט מעניין יהיה לבדוק זאת בעבודות עתידיות. נציין כי לא רואים תופעה זו עבור סימולציית DSMC אך גם התוצאות הנ"ל מאוד רועשות עבור DSMC ולכן קשה להשוות אותן באופן איכותי וכמותי.

תופעה נוספת שניתן לראות באיור 8 ובאיור 10 היא שלאחר המחסום גודל המהירות גדול יותר מאשר לפניו, נשים לב כי אין זה סותר את הטענה שהספיקה בבעיה תמידית היא קבועה לאורך כל החתכים שכן הצפיפות לאחר המחסום באיורים אלו היא הרבה יותר קטנה מאשר לפניו (כפי שניתן לראות באיור 4 ובאיור 6) ולכן הספיקה המסית בסך הכל כן זהה בכל החתכים כפי שגם נבדק והוכח כנכון. עבור איור

4 עד איור 7 ניתן להתבונן בשדות הצפיפות עבור תנאי שפה שונים ולהיווכח כי הצפיפות המקסימלית מתקבלת סמוך למחסום מצדו השמאלי ואילו הצפיפות הנמוכה ביותר מתקבלת סמוך למחסום מצדו הימני, הנתונים האלה כמובן מתיישבים עם ההיגיון שכן לאזורים אלו מגיעים במרביתם חלקיקים אשר הגיעו מהכניסה ולכן נושאים יותר מידע מהכניסה מאשר היציאה (ולהפך בהתאמה).

עבור איור 12 ואיור 13 ניתן לראות את הספיקה המסית כפונקציה של יחס הצפיפויות ויחס הטמפרטורות בהתאמה, ניתן לשים לב להתאמה הטובה בין החישוב אשר הוצג לסימולציית מונטה קרלו. ניתן לשים לב באופן לא מפתיע כי הספיקה יורדת עם הקטנת יחס הצפיפויות/טמפרטורות שכן הפרש הלחצים בזרימה יורד. עבור יחס צפיפויות הירידה נראית כקו לינארי לאורך כל התחום אשר נבדק ואילו עבור יחס טמפרטורות הירידה נראית כקו עקום יותר. כפי שגם ניתן היה לשים לב בשדות המהירות ליחס צפיפויות ישנה השפעה רבה יותר על הזרימה מאשר ליחס טמפרטורות באופן שבו גודל המהירות שהתקבל הינו גדול יותר והירידה בצפיפות קטנה יותר, כך שניתן לצפות כי לא נקבל התנהגות זהה עבור שני קווים אלו (איור 12 ואיור 13).

עבור הכוחות אשר התוצאות עבורם לא מוצגים באיורים, מתקבל כי אין כוח גזירה על הקיר לכל תנאי זרימה אשר נבדקו גם עבור זרימה המונעת מיחס צפיפויות וגם זרימה המונעת מיחס טמפרטורות. אמנם התקבל מכל צד של המחסום כוח גזירה אך בשל סימטריית הבעיה כוחות אלו קיזזו אחד את השני כך שכוח הגזירה הכולל הינו 0. הכוח הנורמלי הפועל על הקיר מתנהג באופן לינארי הן עבור זרימת יחס צפיפויות והן עבור זרימת יחס טמפרטורות כך שעבור יחס גבוה יותר מתקבל כוח נורמלי גדול יותר.

## סיכום

בדו"ח זה חקרנו בעיית זרימה של גז קלוש בתעלה עם הפרעה עבור קירות מסוג Diffuse כתלות בזרימה המונעת מיחס טמפרטורות וזרימה המונעת מיחס צפיפויות. הצגנו את הבעיה, את הרקע המתמטי, שיטת הפתרון ואת התוצאות. השווינו את התוצאות לסימולציית מונטה קרלו (DSMC) כדי להראות את מידת ההתאמה של שתי שיטות הפתרון השונות. הצגנו את השדות ההידרודינמיים של הצפיפות והמהירות עבור תנאי השפה השונים ואת הספיקה המסית ודנו במשמעויות.

כעבודה עתידית מוצע לחקור את מעבר הגזים הקלושים בתווך מספרי הקונדסן הסופיים על מנת לבדוק האם ניתן לתאר ניתוקי זרימה אשר נוצרים כתוצאה מאי-חלקות השפה.

## ביבליוגרפיה

- BAYSAL, O., ERBAS, N. & KOKLU, M. 2004 Control of separated flow past a backward facing step in microchannel. *Microfluid Nanofluid* **1**, 86-92.
- BESKOK, A. 2001 Validation of a new velocity-slip model for separated gas micro flows. *Numer. Hear Transfer B* **40**, 451-471.

- BIRD, G. 1994 *Molecular Gas Dynamics and the Direct Simulation of Gas Flows*. Clarendon.
- CHEN, L., ASAI, K., NONOMURA, T., XI, G. & LIU, T. 2018 A review of Backward-Facing Step (BFS) flow mechanisms, heat transfer and control. *Therm. Sci. Engng Prog.* **6**, 194–216.
- DARBANDI, M. & ROOHI, E. 2011 DSMC simulation of subsonic flow through nano channels and micro/nano backward-facing steps. *Intl Commum. Heat Mass Transfer* **38**, 1443-1448.
- MAHDAVI, A., LE, N. T. P., ROOHI, E. & WHITE, C. 2014 Thermal rarefied gas flow investigations through micro-/nano-backward-facing step: comparison of DSMC and CFD subject to hybrid slip and jump boundary conditions. *Numer. Heat Transfer A* **66**, 733-755.
- MAHDAVI, A. & ROOHI, E. 2015 Investigation of cold-to-hot transfer and thermal separation zone through nano step geometries. *Phys. Fluids* **27**, 072002.
- MANELA, A., GIBELLI, L., 2020 Free-molecular and near-free-molecular gas flows over backward facing steps. *J. Fluid Mech.* **889**, A22, 1-24.
- NARASIMHA, R. 1960 Orifice flow at high Knudsen numbers. *J. Fluid Mech.* Vol. **10**, 371-384.
- MORGAN, K., PERIAUX, J. & THOMASSET, F. (Eds) 1984 *Analysis of Laminar Flow over a Backward Facing Step*. Springer.
- SHARIPOV, F. & GRAUR, I. A. 2012 Rarefied gas flow through a zigzag channel. *Vacuum* **86**, 1778–1782.
- STEWART, J. 1968 Mass flow rate for nearly-free molecular slit flow. *J. Fluid Mech.* Vol. **85**, part 3, 599-608.
- THORSEN, T., MAERKL, S. J. & QUAKE, S. R. 2002 Microfluidic large-scale integration. *Science* **298**, 580–584.